Leçon 107 : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un C-espace vectoriel. Exemples.

Développements :

Théorème de structure des groupes abéliens, Caractères et sous-groupes distingués.

Bibliographie :

Colmez, Peyré, Rombaldi, Rauch, Ulmer, Serre

Rapport du jury 2016/2017 :

Il s'agit d'une leçon où théorie et exemples doivent apparaître. D'une part, il est indispensable de savoir dresser une table de caractères pour des petits groupes, et d'autre part, il faut savoir tirer des informations sur le groupe à partir de sa table de caractères, et être capable de trouver la table de caractères de certains sous-groupes. Les représentations peuvent provenir d'actions de groupes sur des ensembles finis, de groupes d'isométries, d'isomorphismes exceptionnels entre groupes de petit cardinal. Inversement, on peut chercher à interpréter des représentations de façon géométrique, mais il faut avoir conscience qu'une table de caractères provient généralement de représentations complexes a priori non réelles. La présentation du lemme de Schur est importante et ses applications doivent être parfaitement maîtrisées. S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer dans la construction de l'icosaèdre à partir de la table de caractères de A5 en utilisant l'indice de Schur (moyenne des caractères sur les carrés des éléments du groupe) ou évoquer la transformée de Fourier

G désigne un groupe fini et E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie.

1 Représentation linéaire des groupes finis

1.1 Premières définitions et exemples

Définition 1. *Une représentation linéaire de G dans E est un morphisme de groupes $\rho : G \mapsto GL(E)$. E est appelé G-module. On note la représentation (ρ, E). La dimension de E est le degré de la représentation.*

Définition 2. *Représentation fidèle.*

Remarque 3. *Représentation linéaire = action à gauche de G sur E qui est $\mathbb{C}$ linéaire.*

Exemple 4. *Représentation triviale*

Remarque 5. *En se fixant une base, représentation linéaire = morphisme de groupes de G dans $GL_n(\mathbb{C})$.*

Exemple 6.
1. *Groupe diédral D_{2n} isomorphe à $GL_2(\mathbb{R})$. Donc représentation de degré 2.*
2. *Représentation régulière. Elle est fidèle*
3. *Représentation signature.*
4. *Représentation par permutation. Elle est fidèle.*
5. *G groupe cyclique d'ordre n et $\rho : G \mapsto GL(E)$ tel que $\rho(a^k) = u_0^k$ où u_0 isomorphisme de E . Alors ρ est une représentation si et seulement si $u_0^n = id$. Elle est fidèle si et seulement si u_0 est d'ordre n.*
6. *Pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de l'unité. (E et G de dimension finie)*

Définition 7. *Soient (ρ, E) et (σ, E) deux représentations de G. G-morphime. Si u est bijective, les représentations sont dites équivalentes. On note $\mathcal{L}_G(E, F)$ le sev de $\mathcal{L}(E, F)$ constitué des G-morphismes.*

Exemple 8. *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. L'application $v = \frac{1}{card(G)} \sum_{g \in G} \sigma(g) \circ u \circ \rho(g^{-1}) \in \mathcal{L}_G(E, F)$.*

Définition 9. *Sev G-invariant. La représentation ρ sur E induit une représentation ρ' sur F, appelée sous-représentation de ρ.*

Exemple 10. *La représentation régulière admet une droite stable $\mathbb{C}x$ où $x = \sum e_k$. D'où une sous-représentation.*

Définition 11. *L'ensemble des points fixes de G dans E, E^G est G-invariant.*

Exemple 12. *Si $u \in \mathcal{L}_G(E, F)$ alors $\ker(u)$ et $\Im(u)$ sont G-invariants dans E et F respectivement.*

1.2 Opérations sur les représentations

Proposition 13. *Représentation somme directe.*

Proposition 14. *$\rho * (g) =^t (\rho(g^{-1}))$ est une représentation de G sur le dual de E de même degré.*

Proposition 15 (Rauch p43). *Quotient par un sous-groupe distingué.*

Proposition 16. *On définit τ par $\tau(g)(u) = \sigma(g) \circ u \circ \rho(g^{-1})$ pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors τ est une représentation de G dans $\mathcal{L}(E, F)$ de degré $deg(E)deg(F)$. L'espace des points fixes de cette représentation est $\mathcal{L}_G(E, F)$.*

1.3 Représentations irréductibles

Définition 17. *Représentation irréductible.*

Exemple 18. 1. *Une représentation régulière n'est pas irréductible.Elle a toujours une droite ponctuellement invariante ($\sum e_g$).*

2. *La représentation d'un groupe cyclique $\rho(a^k) = u_0^k$ n'est pas irréductible.*
3. *Les représentations de degré 1 sont toujours irréductibles.*

Théorème 19 (Lemme de Schur)**.** *Si E et F ne sont pas équivalents alors $\mathcal{L}_G(E,F) = \{0\}$.*

Si E et F sont équivalents et de dimension finie alors $\mathcal{L}_G(E,F)$ est l'ensemble des homothéties de $\mathbb{C}$, et est donc de dimension 1 sur $\mathbb{C}$

Proposition 20 (Rauch)**.** *Tout sous-espace G-invariant d'une représentation d'un groupe fini admet un supplémentaire G-invariant.*

Théorème 21 (Maschke)**.** *Toute représentation peut s'écrire comme somme de représentations irréductibles.*

Exemple 22 (Ulmer p148)**.**

2 Fonctions centrales et caractères des groupes finis

2.1 Fonctions de G dans $\mathbb{C}$.

Définition 23 (Peyré p16)**.** *On note $\mathbb{C}^G$ l'espace vectoriel des applications de G dans $\mathbb{C}$. Une base est donnée par les fonctions $(\delta_g)_{g\in G}$. En particulier, $\mathbb{C}^G$ est un ev de dim $n = card(G)$.*

Définition 24. *On définit sur $\mathbb{C}^G$ le produit scalaire hermitien ...*

Définition 25 (Romb)**.** *Fonction centrale.*

2.2 Caractères

Définition 26. *Caractère d'une représentation (élément de $\mathbb{C}^G$).*

Exemple 27. 1. *Caractère de la représentation triviale.*

2. *Caractère de la représentation régulière (nul si $g \neq 0$ et $card(G)$ sinon.*
3. *Caractère de la représentation par permutation (compte les points fixes)*

Propriétés 28 (peyré p208 ou Rombaldi)**.** 1. *$\chi(e) = deg(\rho) = dim(E)$.*

2. *χ est une fonction centrale.*
3. *Si E est comme directe de représentations alors son caractère est la somme des caractères correspondants.*
4. *Le caractère de la représentation $\mathcal{L}(E,F)$ est $\chi_\tau = \overline{\chi_\rho}\chi_\sigma$.*
5. *Deux représentations équivalentes ont même caractère.*

Définition 29. *Moyenne d'une représentation : $\mu = \frac{1}{card(G)}\sum \rho(g)$. C'est un projecteur linéaire d'image E^G*

Lemme 30. *$tr(\mu) = dim(E^G) = \frac{1}{card(G)}\sum \chi(g)$.*

Théorème 31. 1. *$\langle \chi_\rho, \chi_\sigma\rangle = \dim(\mathcal{L}_G(E,F)$*

2. *Si χ est le caractère d'une représentation irréductible, on a $\langle \chi, \chi\rangle = 1$*
3. *Si χ et χ' sont deux caractères de représentations irréductibles non équivalentes alors $\langle \chi, \chi'\rangle = 0$*

Définition 32. *Caractère irréductible.*

Théorème 33. *Les caractères irréductibles de G forment un base orthonormée de l'espace des fonctions centrales sur G et le nombre de ces caractères est égal au nombre de classes de conjugaison de G.*

Théorème 34. *Notons p le nombre de classes de conjugaison de G. $\sum_{i=1}^p \chi_k(g_i)\chi_k(g_j) = \frac{card(G)}{card(\overline{g_i})}\delta_{i,j}$*

Théorème 35. *$card(G) = \sum_{i=1}^m \chi_i(e)^2$ où $\chi_1, .., \chi_m$ désignent les caractères irréductibles distincts de G.*

2.3 Application à la décomposition en représentations irréductibles

Théorème 36. *Il y a p représentations irréductibles de G, à isomorphisme près, où p est le nombre de classes de conjugaison.*

Théorème 37 (Colmez p248)**.** *Si V est une représentation de G, si $V = \oplus_{i=1}^k W_i$ est une décomposition de V en somme directe de représentations irréductibles et si W est une représentation irréductible de V alors le nombre m_W de W_i isomorphes à W est égal à $\langle \chi_V, \chi_W\rangle$. En particulier, il ne dépend pas de la décomposition et $V \simeq \oplus_{W irr}\langle \chi_V, \chi_W\rangle W$.*

Corollaire 38. *Deux représentations sont équivalentes si et seulement si elles ont le même caractère.*

Corollaire 39. *Les caractères de G sont les fonctions centrales de la forme $\sum_{i=1}^p m_i\chi_i$ où $m_i = \langle \chi, \chi_i\rangle \in \mathbb{N}$.*

χ est irréductible si et seulement si $\langle \chi, \chi\rangle = 1$.

Corollaire 40 (Représentation régulière)**.** *[Colmez]*

1. *Si E est irréductible alors E apparaît dans la représentation régulière avec la multiplicté $\dim(E)$.*

2.4 Table de caractères

Définition 41 (Peyré p226). *Soit p le nombre de classe de conjugaison de G. On appelle table de caractère le tableau $(\chi_i(g_j)$ où les χ_i sont les caractères irréductibles de de G et g_j les représentants des classes de conjugaison.*

Remarque 42. *On place en première ligne la représentation triviale χ_1.*

Proposition 43 (Peyré). *Les lignes forment une famille orthogonale.*

Exemple 44 (Peyré). *Groupe cyclique $\chi_i(g_0^k) = (w_n^i)^k$.*

Exemple 45 (Ulmer). *On peut construire facilement les tables de caractère de S_3,D_4 ou Q_8.*

Proposition 46 (Ulmer p157). *La table de caractère ne caractérise pas le groupe. D_4 et Q_8 ont même table mais ne sont pas isomorphes.*

3 Applications en théorie des groupes

3.1 Caractères et sous-groupes distingués

Définition 47 (Peyré). *Noyau d'une représentation.*

Proposition 48. *Sous-groupes distingués : $\cup K_{\chi_i}$.*

Corollaire 49. *G est simple si et seulement si pour tout $i \neq 1$ et tout $g \in G$, $\chi_i(g) \neq \chi_i(1)$.*

Exemple 50. *Sous-groupes distingués de S_4 : A_4 et $\langle(12)(34)\rangle$.*

3.2 Groupes abéliens

Définition 51. *Groupe abélien si et seulement si ses représentations irréductibles sont de degré 1.*

Définition 52 (p27). *Un caractère linéaire d'un groupe G est un morphisme de groupe de G dans $\mathbb{C}^*$.*

Définition 53 (Colmez). *Groupe dual d'un groupe abélien. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères linéaires. Les représentations irréductibles coïncident avec avec $\widehat{G}$*

Remarque 54 (Peyré p198). *Une représentation de degré 1 est un morphisme de G dans $\mathbb{C}^*$ en identifiant $GL_1(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}^*$. Cette représentation est donc un caractère linéaire dont le caractère est le caractère lui-même.*

Définition 55 (Colmez). *Transformée de Fourier. Inversion de Fourier.*

Proposition 56. *G est isomorphe à son bidual.*

Théorème 57. *Théorème de structure des groupes abéliens finis.*

Exemple 58. *Des exemples.*